Статья с декабря 2004г. находится в редакции журнала России

ФИЗИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ В ВУЗАХ

(По состоянию на конец марта 2006г. Решение Редколлегии журнала не получено.)

ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ ТОЧКИ В УСКОРЕННЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЁТА

А. Ф. Потехин

Одесский национальный морской университет

65029 Одесса, ул. Мечникова, 34, Украина

Рассматривается два класса систем отсчёта – динамических и кинематических. Показано, что общепринятый вывод основного уравнения динамики точки в ускоренных системах отсчёта оказывается верным лишь в кинематических системах отсчёта. Дан вывод этого уравнения также и для динамических систем отсчёта. Выявлено, что в кинематических ускоренных системах отсчёта переносная и кориолисова силы инерции являются фиктивными (кинематическими), а в динамических системах отсчёта – реальными (динамическими).

Постановка задачи.

В динамике точки решается две основных задачи. Первая задача: при заданной массе m и известных кинематических параметрах движения материальной точки, найти силы, обуславливающие это движение. Вторая задача: при заданной массе и известных силах, найти кинематические параметры её движения. Для решения каждой из этих задач, необходимо знать уравнение, связывающее кинематические параметры движения точки с силами, приложенными к ней

$$f\,(m,\ \text{кинемат. параметров},\ \text{сил}) = 0\,. \qquad (1)$$

Но из кинематики известно, что механическое движение тел есть понятие относительное. Одно и то же движение тела наблюдается и описывается по разному, в зависимости от выбора тела, по отношению к которому это движение наблюдается и описывается. Тогда возникает вопрос, какому телу и связанной с ним системе отсчёта отдать предпочтение при формулировке законов динамики точки? На первый взгляд, ответ очевиден, движение надо рассматривать относительно неподвижной системы отсчёта. Но в природе неподвижных тел нет. Корабль движется относительно поверхности Земли, которая вращается вокруг оси, совершая один оборот в сутки. Эта ось перемещается, примерно, параллельно самой себе по эллиптической орбите, делая один оборот в год в

Гелиоцентрической системы отсчёте, которая, в свою очередь, движется, и так далее. На какой-то из этих систем отсчёта надо остановиться. Ньютон, основоположник динамики, предложил остановиться на Гелиоцентрической системе отсчёта и принять её за неподвижную (НСО). Тогда основное уравнение динамики точки (1) в этой системе отсчёта принимает вид

$$f(m, \text{кинемат. параметров в НСО, сил}) = 0. \qquad (2)$$

Для решаемой Ньютоном динамической задачи о движении планет относительно сферы удалённых звёзд, этого было вполне достаточно, Но Ньютон понимал всю условность неподвижности и этой системы отсчёта, заметив: “Может оказаться, что в действительности не существует покоящегося тела, к которому можно было бы относить места и движения прочих” [1].

Итак, Ньютон сформулировал основные законы динамики точки, применение которых обеспечивало с очень большой точностью решение задачи о движении планет в Гелиоцентрической системе отсчёта. Однако наша практическая деятельность связана, прежде всего, с системой отсчёта, связанной с поверхностью Земли. Следовательно, возникает задача динамики точки в системах отсчёта, движущихся относительно Гелиоцентрической системы отсчёта

При обосновании основного уравнения динамики точки относительно подвижных систем отсчёта (ПСО) возникает дополнительная трудность. Наблюдаемое из подвижной системы отсчёта движение материальной точки, с одной стороны, обусловлено действием приложенных к ней сил, с другой стороны, движением самой подвижной системы отсчёта относительно системы отсчёта, принятой за неподвижную. Тогда основное уравнение динамики точки в движущихся системах отсчёта принимает вид

$$\begin{aligned} &f(m, \textit{кинемат. параметров точки в ПСО};\\ &\textit{сил}; \textit{факторов, учитывающих движение}\\ &\textit{ПСО относительно НСО}) = 0. \end{aligned} \qquad (3)$$

Факторы, учитывающие влияние движения ПСО относительно НСО на относительное движение точки, проявляют себя двояко, в зависимости от того, взаимодействует или не взаимодействует эта материальная точка с тем телом, с которым связана данная ПСО. Или иначе, участвует или не участвует материальная точка в переносном движении того тела, с которым связана ПСО. В связи с этим, все системы отсчёта подразделяются на динамические и кинематические. Если рассматриваемая материальная точка взаимодействует с тем телом, с которым связана ПСО, вследствие чего эта точка участвует в переносном движении данной системы отсчёта, то такая система отсчёта для этой материальной точки является динамической (ДСО). В противном случае система отсчёта является кинематической. То есть, если рассматриваемая материальная точка не взаимодействует с тем телом, с которым связана ПСО, вследствие чего она не участвует в переносном движении этой системы отсчёта, то такая система отсчёта для этой материальной точки является кинематической (КСО). Очевидно, что одна и та же система отсчёта для одних материальных точек может быть динамической, для других– кинематической. В зависимости от того, является рассматриваемая система отсчёта для данной материальной точки кинематической или динамической, основное уравнение динамики точки будет разным.

Основное уравнение динамики точки в кинематических системах отсчёта

Основное уравнение динамики точки в неподвижной системе отсчёта $Oxyz$ имеет вид

$$m\bar{a} = \bar{F}(t,\bar{r},\bar{v}) \tag{4}$$

где m – масса точки, $\bar{F}(t,\bar{r},\bar{v})$ – равнодействующая активных сил и сил реакций связей, которая зависит от времени t, радиус-вектора точки $\bar{r}$ и её скорости $\bar{v}$.

Пусть $Ox'y'z'$ является произвольно движущейся относительно $Oxyz$ кинематической для точки m системой отсчёта. Тогда выполняется соотношение

$$\bar{r} = \bar{r}_{0'} + \bar{r}', \qquad t = t', \tag{5}$$

где $\bar{r}'$ – радиус-вектор точки в движущейся системы отсчёта, $\bar{r}_{0'}$ – радиус вектор начала подвижной системы отсчёта относительно неподвижной.

Дифференцируя векторное равенство (5) один раз, а затем второй раз, получим известные из кинематики соотношения для абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки соответственно через её относительную и переносную скорости, относительное, переносное и кориолисово ускорения

$$\bar{v} = \bar{v}' + \bar{v}^{e}, \tag{6}$$

$$\bar{a} = \bar{a}' + \bar{a}^{e} + \bar{a}^{Cor}. \tag{7}$$

Подставляя (6) и (7) в (4), получим

$$m(\bar{a}' + \bar{a}^{e} + \bar{a}^{Cor}) = \bar{F}[t,(\bar{r}_{0'} + \bar{r}'),(\bar{v}' + \bar{v}^{e})]. \tag{8}$$

В правой части этого уравнения выражение для той же самой равнодействующей силы, что и в исходном уравнении (4) записано теперь через кинематические параметры движения материальной точки относительно штрихованной системы отсчёта и кинематические параметры движения самой штрихованной системы отсчёта относительно неподвижной системы отсчёта. Обозначим

$$\bar{F}[t,(\bar{r}_{0'} + \bar{r}'),(\bar{v}' + \bar{v}^{e})] = \bar{F}'(t,\bar{r}',\bar{v}'), \tag{9}$$

$$\bar{J}^{e} = -m\bar{a}^{e}, \tag{10}$$

$$\bar{J}^{Cor} = -m\bar{a}^{Cor}, \tag{11}$$

тогда уравнение (8) принимает вид

$$m\bar{a}' = \bar{F}'(t,\bar{r}',\bar{v}') + \bar{J}^{e} + \bar{J}^{Cor}. \tag{12}$$

Уравнение (12) и есть основное уравнение динамики точки для движущихся кинематических систем отсчёта. Появившиеся в этом уравнении справа два члена учитывают тот факт, что относительно штрихованной системы отсчёта у материальной точка появилось движение, обусловленное чисто кинематическим эффектом – движением самой штрихованной системы отсчёта относительно неподвижной системы отсчёта. Исторически сложилось так, что их стали называть переносной $\bar{J}^e$ и кориолисовой $\bar{J}^{Cor}$ силами инерции. Поскольку эти «силы инерции» не является результатом физического взаимодействия материальной точки с другими телами или полями, то они не являются силами в общепринятом в механике смысле. Они не удовлетворяю третьему закону Ньютона, закону равенства действия и противодействия. Поэтому, в дальнейшем будем называть их силами фиктивными.

Пусть кинематическая система отсчёта движется поступательно. Тогда кориолисово ускорение равно нулю. Следовательно, равна нулю и кориолисова фиктивная сила инерции, и уравнение (12) принимает вид

$$m\bar{a}' = \bar{F}'(t, \bar{r}', \bar{v}') + \bar{J}^e. \qquad (13)$$

Пусть, кроме того, кинематическая система отсчёта движется не только поступательно, но и равномерно, прямолинейно со скоростью $\bar{u}$. Тогда не только кориолисова, но и переносная сила инерции равна нулю. Преобразование (5) в этом случае принимает вид

$$\bar{r} = \bar{u}t + \bar{r}', \qquad t = t'. \qquad (14)$$

Такое преобразование систем отсчёта называют преобразованием Галилея. Тогда (12) принимает вид

$$m\bar{a}' = \bar{F}'(t, \bar{r}', \bar{v}'). \qquad (15)$$

Это уравнение имеет тот же вид, что и уравнение (4). Но они отличаются тем, что функциональная зависимость одной и той же равнодействующей силы через радиус вектор и скорость материальной точки соответственно в неподвижной $\bar{F}$ и движущейся $\bar{F}'$ системе отсчёта – различны. В таком случае в математике говорят, что уравнение (4) ковариантно относительно преобразования (14) систем отсчёта.

Если равнодействующая сила $\bar{F}$ не зависит ни от радиус-вектора $\bar{r}$ точки, ни от её скорости $\bar{v}$, то уравнение (15) имеет вид

$$m\bar{a}' = \bar{F}(t). \qquad (16)$$

В этом случае выражение (4) при преобразовании Галилея (14) сохраняет не только свой вид, но и выражение для входящих в него функций. В таком случае в математике говорят, что уравнение (4) инвариантно относительно преобразования (14) систем отсчёта.

В основное уравнение динамики точки в кинематической системе отсчёта как в общем случае – (12), так и в частных случаях – (13), (15), (16) всегда входит переносная скорость движения этой точки относительно неподвижной системе отсчёта как в выражение (9) для равнодействующей силы, если она зависит от скорости, так и через начальные условия. Поэтому, по наблюдениям за движением материальной точки из кинематической системы отсчёта, всегда можно обнаружить движение этой системы отсчёта относительно системы отсчёта, принятой за неподвижную.

Заметим, что в кинематической системе отсчёта рассматриваемая материальная точка никогда не может быть в состоянии покоя. Для того чтобы она была в состоянии покоя, её относительная скорость и относительное ускорение должны равняться нулю и тогда, уравнение (12) принимает вид

$$\overline{F}'(t,\overline{r}',\overline{v}') + \overline{J}^e = 0 \qquad (17)$$

Но переносная сила инерции в кинематической системе отсчёта является фиктивной, поэтому она не может уравновесить реальную физическую силу $\overline{F}'$. Невозможность относительного покоя материальной в кинематической системе отсчёта следует также из того, что если относительная скорость и относительное ускорение материальной точки в движущейся системе отсчёта равны нулю, то эта точка вовлекается в переносное движение данной системы отсчёта. Но тогда эта система отсчёта для такой материальной точки будет уже не кинематической, а динамической.

<u>Основное уравнение динамики точки в динамических системах отсчёта</u>

Рассмотрим произвольно движущееся относительно неподвижной системы отсчёта $Oxyz$ тело, с которым связана система отсчёта $Ox'y'z'$. Материальная точка M движется в неподвижной системе отсчёта $Oxyz$ согласно уравнению (4). Пусть точно такая же материальная точка M', во-первых, полностью вовлекается в движение системы отсчёта $Ox'y'z'$ и, во-вторых, находится под воздействием точно таких же сил, как и точка M в неподвижной системе отсчёта. В этом случае штрихованная система отсчёта для материальной точки M' является динамической. Получить основное уравнение динамики точки M' в штрихованной системе отсчёта из уравнения движения (4) в неподвижной системе отсчёта с помощью кинематического преобразования невозможно, так как две различные материальные точки M и M' уже не связаны преобразованием (5). Поэтому, основное уравнение динамики точки должно быть получено лишь на основе исходных законов Ньютона, сформулированных для неподвижной системы отсчёта.

Пусть вначале штрихованная, динамическая для материальной точки M', система отсчёта движется относительно неподвижной системы отсчёта поступательно, равномерно и прямолинейно. Такие динамические системы отсчёта называются инерциальными. Тогда, согласно динамическому принципу относительности Галилея, основное уравнение динамики точки M' в этой системе отсчёта с точностью до обозначения кинематических параметров совпадает с основным уравнением динамики (4) точки M в неподвижной системе отсчёта, то есть имеет вид

$$m\overline{a}' = \overline{F}(t,\overline{r}',\overline{v}') \qquad (18)$$

Обратим особое внимание на то, что уравнение (18) есть не результат кинематического преобразования уравнения (4), а является следствием экспериментального факта, установленного Галилеем и заложенного в фундамент классической механики Ньютоном.

Сообщим теперь этой динамической штрихованной системе отсчёта произвольное движение относительно неподвижной системы отсчёта. Материальная точка M', двигаясь относительно штрихованной системы отсчёта, участвует в ускоренном движении этой системы отсчёта. В таком случае, в направлении переносного и кориолисового ускорений эта материальная точка взаимодействует с тем телом, с которым связана штрихованная система отсчёта. Тогда в направлении её переносного ускорения действует сила реакции $\overline{N}^{e}$, а в направлении кориолисового ускорения действует сила реакции $\overline{N}^{Cor}$. Согласно второму закона Ньютона,

$$m\overline{a}^{e} = \overline{N}^{e} \qquad (19)$$

$$m\overline{a}^{Cor} = \overline{N}^{Cor} \qquad (20)$$

Складывая левые и правые части равенств (18) – (20), т. е. применяя принцип независимости действия сил в классической механике Ньютона, получим

$$m(\overline{a}' + \overline{a}^{e} + \overline{a}^{Cor}) = \sum \overline{F}_k + \overline{N}^{e} + \overline{N}^{Cor} \qquad (21)$$

или

$$m\overline{a} = \sum \overline{F}_k + \overline{N}^{e} + \overline{N}^{Cor}. \qquad (22)$$

Мы получили основное уравнение динамики точки M' в неподвижной системе отсчёта $Oxyz$. Следовательно, любую задачу динамики точки в произвольно движущейся динамической системе отсчёта, всегда можно решить, переходя к её рассмотрению в исходной неподвижной системе отсчёта. Однако решение таких задач, в большинстве случаев, значительно упрощается, если мы будем их рассматривать именно в движущихся динамических системах отсчёта. Кроме того, рассмотрение основного уравнения динамики точки в движущихся динамических системах отсчёта приобретает и особое методологическое значение при развитии общей физической теории релятивистского движения.

Представим уравнение (21) в виде

$$m\overline{a}' = \sum \overline{F}_k + \overline{N}^{e} + \overline{N}^{Cor} + \overline{F}^{e} + \overline{F}^{Cor}, \qquad (23)$$

где

$$\overline{F}^{пер} = -m\overline{a}^{пер}, \qquad (24)$$

$$\overline{F}^{Cor} = -m\overline{a}^{Cor}. \qquad (25)$$

Уравнение (12) движения материальной точки в кинематической неинерциальной системе отсчёта принципиально отличается от уравнения (23) в динамической неинерциальной системе отсчёта. Во-первых, уравнение (12) получено формально-математическим преобразованием систем отсчёта, в то время как уравнение (23) доказано на основании исходных принципов механики Ньютона. Во-вторых, в (12) переносная и кориолисова силы инерции является кинематическими или фиктивными, тогда как в (23) переносная и кориолисова силы инерции являются динамическими или реальными, обусловленными соответствующими силами реакций $\overline{N}^e$ и $\overline{N}^{Cor}$.

И в этом случае можно найти вид уравнения (23) в некоторых частных случаях движения систем отсчёта, подобно тому, как это сделано выше для кинематических систем отсчёта. Найдём, например, условие относительного покоя точки в динамической подвижной системе отсчёта. Для этого в уравнении (23) следует положить $\overline{v}'=0, \overline{a}'=0$, и тогда получим

$$\sum \overline{F}_k + \overline{N}^e + \overline{F}^e = 0 \qquad (26)$$

Таким образом, для того чтобы материальная точка находилась в состоянии покоя в движущейся ускоренно динамической системе отсчёта, необходимо и достаточно, чтобы векторная сумма приложенных к ней всех активных, сил реакций связей, а также её переносной силы инерции равнялась нулю.

Пример 1. Рассмотреть затухающие линейные колебания математического маятника в системе отсчёта $O'x'y'$ (тележки), которая движется поступательно относительно неподвижной системы отсчёта Oxy поверхности Земли (лабораторной) с ускорением $\overline{q}$. Точка подвеса маятника и среда сопротивления неподвижны в лабораторной СО.

Решение.

С известной точностью, лабораторную систему отсчёта Oxy принимаем за неподвижную. Считаем, что в начальный момент времени начала неподвижной и подвижной штрихованной систем отсчёта совпадают с точкой подвеса маятника и их оси параллельны. Движение штрихованной системы отсчёта происходит в положительном направлении оси x. В этом случае маятник не принимает участия в движении штрихованной системы отсчёта, поэтому эта система отсчёта для него является кинематической. Тогда основное уравнение динамики (13) груза маятника принимает вид

$$m\overline{a}' = \overline{P} + \overline{T} + \overline{R} + \overline{J}^e \qquad (27)$$

где $\overline{P}, \overline{T}, \overline{R}, \overline{J}^e$, соответственно сила тяжести груза, сила реакции нити, сила сопротивления среды и переносная фиктивная сила инерции груза.

В силу кинематического преобразования

$$\bar{r} = \frac{1}{2}\bar{q}t^2 + \bar{r}', \quad t = t' \tag{28}$$

получим

$$\overline{R} = -\mu\bar{v} = -\mu(\bar{q}t + \bar{v}'), \qquad \bar{J}^e = -m\bar{q} \tag{29}$$

Проектируя (27) на направление касательной к траектории груза маятника в неподвижной системе отсчёта, с учётом соотношений $v'_\tau = v_\tau - q_\tau t$, $a'_\tau = a_\tau - q_\tau$, и принимая во внимание, что в силу преобразования (28) $\varphi = \varphi'$, получим уравнение колебаний маятника в штрихованной системе отсчёта.

$$\ddot{\varphi}' + 2n\dot{\varphi}' + k_1{}^2\varphi' = 0 \tag{30}$$

Тогда

$$\varphi' = e^{-nt}\left(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t\right), \tag{31}$$

$$x' = l\sin\varphi' - \frac{qt^2}{2}, \quad y' = l\cos\varphi', \tag{32}$$

$$T = ml\dot{\varphi}'^2 + P\cos\varphi'. \tag{33}$$

Таким образом, из штрихованной системы отсчёта видны те же колебания маятника, что и из неподвижной системы отсчёта, но удаляющиеся с ускорением q в отрицательном направлении оси x'

Пример 2. Рассмотреть затухающие линейные колебания математического маятника в системе отсчёта $O'x'y'$ (тележки), которая движется поступательно относительно неподвижной системы отсчёта Oxy поверхности Земли (лабораторной) с ускорением $\bar{q}$. Точка подвеса маятника и среда сопротивления неподвижны в системе отсчёта тележки $O'x'y'$.

Решение.

Система отсчёта $O'x'y'$ является для маятника динамической. Основное уравнение динамики точки (23) в этом случае принимает вид

$$m\bar{a}' = \overline{P} + \overline{T} + \overline{R} + \overline{T}' + \overline{F}^e \tag{34}$$

здесь $\overline{T}'$ – та часть силы реакции нити, которая обеспечивает перемещение груза маятника вместе с тележкой с ускорением $\bar{q}$, в силу чего возникает реальная, физическая переносная сила инерции

$$\overline{F}^e = -mq \tag{35}$$

Вводя полную силу реакции нити маятника

$$\overline{T}^* = \overline{T} + \overline{T}' \tag{36}$$

перепишем уравнение (34) в виде

$$m\overline{a}' = \overline{P} + \overline{T}^* + \overline{R} + \overline{F}^e \tag{37}$$

Проектируя (37) на направление касательной к траектории груза маятника в штрихованной системе отсчёта, получим дифференциальное уравнение колебаний маятника

$$\ddot{\varphi}' + 2n\dot{\varphi}' + k_1^2\varphi' = -ql^{-1} \tag{38}$$

решая которое, находим

$$\varphi' = e^{-nt}\left(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t\right) - \frac{q}{lk_1^2}, \tag{39}$$

$$x' = l\sin\varphi'; \quad y' = l\cos\varphi', \tag{40}$$

$$N = ml\dot{\varphi}'^2 + P\cos\varphi' - mq\sin\varphi' \tag{41}$$

Сравнение решения приведенных двух задач о колебаниях маятника в кинематической ускоренной и динамической ускоренной системах отсчёта выявляет их принципиальное различие. Во-первых, в динамической ускоренной системе отсчёта возникла дополнительная сила реакции нити T', приложенная к грузу маятника. Во-вторых, в динамической ускоренной системе отсчёта переносная сила инерции F^e является физической или реальной, которая привела к отклонению местной вертикали в системе отсчёта тележки на угол $\varphi_0 = -\frac{q}{lk_1^2}$ и проявляется она также как сила противодействия со стороны нити маятника на его точку подвеса.

Выводы

1. Динамический принцип относительности Галилея есть неотъемлемая часть исходных принципов классической механики Ньютона. Этот принцип является следствием экспериментальных фактов. Общепринятое в существующей учебной литературе утверждение о том, что динамический принцип относительности Галилея является одним из следствий основного уравнения динамики точки (12) в кинематических системах отсчёта, является ошибочным

2. Все подвижные системы отсчёта разделяются на два класса: динамические и кинематические. В каждом из этих классов, в свою очередь, системы отсчёта подразделяются на неускоренные и ускоренные друг по отношению к другу.

3. Динамические, неускоренные по отношению к сфере удалённых звёзд, системы отсчёта, следовательно, неускоренные и друг относительно друга, называются инерциальными. Во всех инерциальных системах отсчёта выполняется динамический принцип относительности Галилея, то

есть, в каждой из них идентичные опыты протекают, наблюдаются и описываются одинаково. Или иначе: никакими опытами в инерциальных системах отсчёта нельзя обнаружить их поступательное, равномерное и прямолинейное движение друг относительно друга.

4. Динамические, ускоренные по отношению к инерциальным, системы отсчёта называются неинерциальными. В динамических неинерциальных системах отсчёта основное уравнение динамики точки формулируется точно так же, как и в инерциальных системах отсчёта: “Произведение массы материальной точки на вектор её ускорения равняется векторной сумме всех фактически приложенных к ней сил, включая дополнительные силы реакций со стороны тела отсчёта данной неинерциальной системы отсчёта на материальную точку, а также её переносную и кориолисову силы инерции”.

5. Общепринятое с конца X1X столетия и по настоящее время отнесение всех неускоренных друг по отношению к другу систем отсчёта к инерциальным является ошибочным, так как опыты в кинематических неускоренных системах отсчёта позволяют обнаружить их движение относительно других систем отсчёта. Следовательно, динамический принцип относительности Галилея-Ньютона в таких системах отсчёта не выполняется.

Литература

1 Ньютон И. Математические начала натуральной философии. – М.: Наука. – 1989. – 688с.

2 Потехин А. Ф. Краткий курс теоретической механики в вопросах и ответах с анализом базовых понятий (укр.) Рекомендовано Министерством образования и науки Украины для студентов вузов. Издание второе. – Львов: Новый свет. – 2004. – 200с.

3 Потехин А. Ф. К вопросу о принципе эквивалентности в ОТО Эйнштейна (англ). // Тез. докл. на международной конференции, посвящённой 100-летию со дня рождения Георгия Гамова «Astrophysics and Cosmology after Gamov – Theory and Observations», Одесса 8-14 августа 2004г. – Одесса: Астропринт, 2004. – С. 126.

4 Потехин А. Ф. О замкнутом круге понятий наука–образование–наука на примере физики. // Научный вестник Академии наук высшей школы Украины. – 2004. – №28. – С.112–120.