ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ. ФИЗИКА
1985, №10

ПОТЕХИН А. Ф.

О ДВИЖЕНИИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ В ПОСТНЬЮТОНОВСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Плотность массовой силы гравитационного поля, образуемого движущейся сплошной средой в постньютоновском приближении, согласно [1],[2], равна

$$\overline{F} = \rho(\overline{H} + \overline{v} \times \overline{G}).$$

Учитывая данную силу в уравнении сплошной среды, которую считаем идеальной, получим

$$\frac{d\overline{v}}{dt} = (\overline{H} + \overline{v} \times \overline{G}) + F^* - \frac{1}{\rho} gradp,$$

Или в форме Громека-Лемба

$$\frac{d\overline{v}}{dt} + grad\frac{v^2}{2} + (2\overline{\omega} + \overline{G}) \times \overline{v} = \overline{H} + F^* - \frac{1}{\rho} gradp, \qquad (1)$$

где $\omega = \frac{1}{2} rot\overline{v}$, F^* - плотность других массовых сил, кроме $\overline{F}$, которые считаются заданными, в частности, если рассматривается изолированное движение среды, то F^*=0.

Векторы $\overline{H}$ и $\overline{G}$, определяющие собственное гравитационное поле движущейся среды в постньютоновском приближении, должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned} rot\overline{H} &= \frac{\partial\overline{G}}{\partial t}, \\ div\overline{H} &= -\frac{1}{\gamma_0}\rho, \\ rot\overline{G} &= g_0(\rho\overline{v} - \gamma_0\frac{\partial\overline{H}}{\partial t}), \\ div\overline{G} &= 0, \end{aligned} \qquad (2)$$

где гравитационная постоянная $\gamma_0 = (4\pi k)^{-1}$, здесь k постоянная тяготения Ньютона, а постоянная g_0 определяется из соотношения $c^2 = (\gamma_0 g_0)^{-1}$, c –скорость света в вакууме.

В результате получаем замкнутую систему 11 уравнений относительно 11 неизвестных: составляющих трёх векторов $\overline{H}$, $\overline{G}$, и $\overline{v}$, а также плотности среды ρ и давления p, причём, как это видно из (1) и третьего уравнения (2), данная система уравнений является нелинейной.

Из системы уравнений (2) получим следующие два уравнения Даламбера, определяющие векторный потенциал $\overline{A}$ и скалярный потенциал φ через скорость и плотность среды

$$\Delta A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overline{A}}{\partial t^2} = -g_0\rho\overline{v}, \qquad \Delta A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overline{A}}{\partial t^2} = -g_0\rho\overline{v},$$

Если применить калибровочное соотношение Лоренца, которое в данном случае имеет вид

$$div\overline{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{dt}.$$

Тогда

$$\overline{G} = rot\overline{A}, \qquad (3)$$

$$\overline{H} = -grad\varphi + \frac{\partial\overline{A}}{\partial t} \qquad (4)$$

В отличие от классической теории гравитации, когда $\overline{H} = -grad\varphi$, в данном случае, как это следует из (4), напряжённость гравитационного поля $\overline{H}$ не является потенциальным вектором. Поэтому, даже если процесс является баротропным, а внешние силы $\overline{F}$ потенциальны, движение идеальной среды всё же не будет потенциальным, как это имеет место в классической гидромеханике, то есть в ней будут возникать и разрушаться вихри.

Рассмотрим стационарное движение среды, когда уравнения (1), (2) принимают вид

$$(2\overline{\varpi} + \overline{G}) \times \overline{v} = -grad\frac{v^2}{2} + \overline{H} + F^* - \frac{1}{\rho}gradp, \qquad (5)$$

$$\begin{aligned} &rot\overline{H} = 0, \\ &div\overline{H} = -\frac{1}{\gamma_0}\rho, \\ &rot\overline{G} = g_0\rho\overline{v}, \\ &div\overline{G} = 0. \end{aligned} \qquad (6)$$

В этом случае $\overline{H} = -grad\varphi$, и если движение баротропно, то, как известно, можно ввести такую функцию давления P, что $\frac{1}{\rho}gradp = gradP$. Если, кроме того, внешние силы потенциальны, так что $\overline{F} = -grad\Pi$, то (5) принимает вид

$$\overline{\Omega} \times \overline{v} = -grad\Phi, \qquad (7)$$

где обозначено

$$\overline{\Omega} = 2\overline{\varpi} + \overline{G}, \qquad \Phi = \frac{v^2}{2} + \varphi + \Pi + P.$$

Из (7) прежде всего, следует теорема Бернулли о сохранении Φ вдоль линий тока и вдоль вихревых линий $\overline{\Omega} = rot(\overline{v} + \overline{A})$.

Если взять операцию ротора от обеих частей уравнения (7) и учесть, что в рассматриваемом случае стационарного движения $\partial\overline{\varpi}/\partial t = 0$, то получим

$$\frac{\partial\overline{\Omega}}{\partial t} = rot(\overline{\Omega} \times \overline{v}),$$

что совместно с выполняющимся уравнением $div\overline{\Omega} = 0$ есть условие сохранения вектора $\overline{\Omega}$ через поверхность σ

$$\int_\sigma \Omega_n d\sigma = const.$$

Отсюда вытекают [3] несколько следствий:

1) векторные поверхности векторного поля $\overline{\Omega}$ переходят во время движения также в векторные поверхности;
2) векторные линии векторного поля $\overline{\Omega}$ всегда во время движения переходят также в векторные линии;
3) напряжённость любой векторной трубки векторного поля $\overline{\Omega}$ во всё время движения остаётся постоянной.

Таким образом, если внешние массовые силы потенциальны и движение баротропно, то с учётом релятивистских эффектов динамически возможны только такие стационарные движения идеальной сплошной среды, при которых имеет место закон вмороженности вихревых линий $\overline{\Omega} = rot(\overline{v} + \overline{A})$, а не вихревых линий $\overline{\varpi} = rot\,\overline{v}$, как это имеет место в классической гидродинамике. Если даже в начальный момент времени среда была незавихрена, т. е. $rot\,\overline{v}_0 = 0$, тот при дальнейшем развитии движения в ней должны возникать вихри, причём такие, что

$$\int_L (\overline{v} + \overline{A}) dl = const.$$

В заключение заметим, что учёт вязкости при исследовании движения среды в постньютоновском приближении не представляет принципиальных затруднений [4].

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., Наука, 1973.
2. Потехин А. Ф. Деп. в ВИНИТИ, рег. №1114-82.
3. Седов Л. И. Механика сплошной среды, т.1. М. Наука, 1973
4. Потехин А. Ф. Деп. в ВИНИТИ, рег. №4363-83.