ВСЕСОЮЗНЫЙ ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ С С С Р

Депонированная рукопись №4363 - 83 от 08.08.1983

Печатается в соответствии с решением бюро редколлегии журнала

“Известия вузов МВ ССО СССР, серия Физика”

от 4 июля 1983 г.

О ГРАВИТАЦИОННОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЧАСТИЦ И ТУРБУЛЕНТНОСТИ

А. Ф. Потехин
Одесский институт инженеров морского флота

Рассмотрено движение частицы в постоянном и однородном гироскопическом поле без учёта и с учётом линейной и нелинейной силы сопротивления под действием центральной, постоянной по модулю, вращающейся силы. Выявлена возможность возникновения вихрей даже в слабых гироскопических полях за счёт перекачки энергии от внешнего источника, если возникают соответствующие условия для резонанса.

В соответствии с постньютоновским приближением общей теории относительности [1], на частицу массой m действует сила

$$\overline{P} = m(\overline{H} + \overline{v} \times \overline{G}),$$

где $\overline{H}$ - вектор напряжённости гравитационного поля. Физический смысл вектора $\overline{G}$ выяснен в работе [1], где показано, что это есть аналог вектора магнитной индукции, а по эффектам его проявления он назван вектором гироскопической индукции. Вектора $\overline{H}$ и $\overline{G}$ определяются из системы уравнений в форме Максвелла по плотности гравитационных зарядов и вектору плотности гравитационного тока. В таком случае, гравитационное взаимодействие частиц сводится к взаимодействию частицы с гравито-гироскопическим полем, порождаемым данной системой, и динамическое уравнение движения частицы имеет вид

$$\frac{d\overline{q}}{dt} + \overline{G} \times \overline{q} = \overline{F},$$

где $\overline{q}$ - импульс частицы, $\overline{F}$ - равнодействующая приложенных к ней сил, включая силу $m\overline{H}$.

Для скоростей, значительно меньших скорости света c, а также в слабых гравитационных полях, второй член в левой части уравнения пренебрежимо мал. Но даже в этих случаях иногда данный член необходимо учитывать, например, при рассмотрении движений в течение больших промежутков времени в задачах астрономии. Существует ещё один класс задач, где можно ожидать проявления второго члена – это задачи о вихрях и турбулентности. Покажем, что в таких случаях проявление действия слабого гироскопического поля обуславливается не только временным фактором, но и явлением резонансного характера.

Рассмотрим движение частицы в постоянном и однородном гироскопическом поле $\overline{G} = const$ под действием силы $\overline{F} = \overline{F}_0(\overline{i}\cos\omega t \pm \overline{j}\sin\omega t)$, где $\overline{i}$, $\overline{j}$ - орты осей координат, $\overline{F}_0$ и ω - постоянные. Два знака здесь соответствуют противоположным направлениям вращения силы

Если ось z совместить с направлением поля $\overline{G}$, то при $v \prec c$ уравнения движения частицы в плоскости xy принимают вид

$$\begin{aligned} &\frac{dv_x}{dt} - Gv_y = f_0 \cos\omega t, \\ &\frac{dv_y}{dt} - Gv_x = \pm f_0 \sin\omega t \end{aligned} \qquad (1)$$

где $f_0 = F_0/m$. Общее решение этих уравнений

$$\begin{aligned} v_x &= a\cos(Gt+\alpha) \pm f_0 (G\pm\omega)^{-1} \sin\omega t, \\ v_y &= -a\sin(Gt+\alpha) - f_0 (G\pm\omega)^{-1} \cos\omega t \end{aligned}$$

a и α - произвольные постоянные. В частности, при $v_{0x} = v_{0y} = 0$, находим с учётом верхнего знака

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{2f_0}{G+\omega} \sin\frac{G+\omega}{2}t \cos\frac{G-\omega}{2}t, \\ v_y &= -\frac{2f_0}{G+\omega} \sin\frac{G+\omega}{2}t \sin\frac{G-\omega}{2}t \end{aligned} \qquad (2)$$

и с учётом нижнего знака

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{2f_0}{G-\omega} \sin\frac{G-\omega}{2}t \cos\frac{G+\omega}{2}t, \\ v_y &= -\frac{2f_0}{G-\omega} \sin\frac{G-\omega}{2}t \sin\frac{G+\omega}{2}t. \end{aligned} \qquad (3)$$

Полагая в (2) $\omega = G$, имеем:

$$v_x = \frac{f_0}{G} \sin Gt, \quad v_y = 0,$$

и в этом случае частица в плоскости xy совершает прямолинейное гармоническое колебание.

При частоте ω близкой к G для случая (3) получим, что частица будет двигаться с амплитудой скорости

$$A = \left| \frac{2f_0}{G-\omega} \sin\frac{G-\omega}{2}t \right|,$$

медленно меняющейся по гармоническому закону с периодом $\tau = 4\pi / |G-\omega|$, т. е.

$$v_x \approx A\cos Gt; \quad v_y = -A\sin Gt,$$

При этом она вращается почти по окружности с радиусом, изменяющимся от $r_{\min} = 0$ до $r_{\max} = 2f_0 / G|G-\omega|$ - явление, известное в теории колебаний как биение.

Переходя в (3) к пределу при $\omega \to G$ находим

$$v_x = f_0 t\cos Gt; \quad v_y = -f_0 t\sin Gt, \tag{4}$$

- наблюдается явление резонанса, когда скорость частицы растёт пропорционально времени, а её кинетическая энергия растёт пропорционально квадрату времени

$$T = F_0^2 t^2 \Big/ \ 2m.$$

Интегрируя (4) ещё раз, получим

$$x = f_0 \varphi(t)\sin[Gt + \psi(t)],$$

$$y = f_0 \varphi(t)\cos[Gt + \psi(t)],$$

где

$$\varphi(t) = G^{-1}(t^2 + G^{-2})^{\frac{1}{2}}; \quad tq[\psi(t)] = (Gt)^{-1}$$

и в плоскости, перпендикулярной полю $\overline{G}$, частица в резонансном режиме будет разгоняться по раскручивающейся спирали. Таким образом, выявляется возможность возникновения вихрей даже в слабых гироскопических полях за счёт перекачки энергии от внешнего источника, если возникают соответствующие условия для резонанса.

С учётом силы вязкого сопротивления имеем следующие уравнения движения

$$\frac{dv_x}{dt} - Gv_y + nv_x = f_0 \cos\omega t,$$

$$\frac{dv_y}{dt} + Gv_x + nv_y = \pm f_0 \sin\omega t$$

Для установившегося движения их решения:

$$v_x = \pm \frac{f_0}{\left[n^2 + (G \pm \omega)^2\right]^{1/2}} \sin\omega t(\omega t \pm \beta),$$

$$v_y = -\frac{f_0}{\left[n^2 + (G \pm \omega)^2\right]^{1/2}} \cos\omega t(\omega t \pm \beta) \tag{5}$$

где

$$tg\beta = \frac{n}{|G \pm \omega|},$$ (

откуда при $\omega = G$, с учётом верхнего знака, получим, что частица вращается по окружности с радиусом $r = f_0 / G\left(n^2 + 4G^2\right)^{\frac{1}{2}}$, в то время как с учётом нижнего знака по окружности $r = f_0 / Gn$, к которой в переходном процессе частица будет приближаться по спирали изнутри или снаружи в зависимости от соотношения между поступающей и рассеиваемой энергией. При вращении частицы по резонансному предельному циклу её кинетическая энергия равна $T = F_0^2 \big/ \ 2mn^2$.

При силе сопротивления , произвольным образом зависящей от скорости,

$$\overline{R} = -\varphi_1(v)\frac{\overline{v}}{v} = -\varphi\ (v)\overline{v},$$

получим следующее уравнения движения

$$\frac{dv_x}{dt} - Gv_y + \left[\varphi\left(v_x^2 + v_y^2\right)^{1/2}\right]v_x = f_0 \cos\omega t,$$

$$\frac{dv_y}{dt} + Gv_x + \left[\varphi\left(v_x^2 + v_y^2\right)^{1/2}\right]v_y = \pm f_0 \sin\omega t,$$

установившуюся часть решения которой ищем в виде (5)

$$v_x = A\sin(\omega t + \beta),$$
$$v_y = B\cos(\omega t + \beta); \quad |A| = |B|$$

Для установившегося движения (4.42)

$$\varphi\left(v_x^2 + v_y^2\right)^{\frac{1}{2}} = const.$$

и тогда

$$A = \pm\frac{f_0}{\left[\varphi^2(v) + (G \pm \omega)^2\right]^{1/2}},$$

$$B = -\frac{f_0}{\left[\varphi^2(v) + (G \pm \omega)^2\right]^{1/2}}.$$

Возведя в квадрат обе части последних равенств и складывая их, получим амплитудно-частотное уравнение

$$\varphi^2(v)v^2 + (G \pm \omega)^2 v^2 - f_0^2 = 0,$$

которое, например, для турбулентного сопротивления типа $\varphi(v) = -nv^{k-1}$ имеет вид

$$n^2 v^{2k} + (G \pm \omega)^2 v^2 - f_0^2 = 0$$

Решая амплитудно-частотное уравнение, найдём модуль скорости движения частицы по предельному циклу и радиус цикла как функции частоты возмущения ω. В связи с нелинейностью амплитудно-частотного уравнения, решение в общем случае будет неоднозначным, т. е.., одной и той же частоте возмущения могут соответствовать несколько предельных циклов, по которым частица движется с различными скоростями, могут наблюдаться срывы и скачки с одних предельных циклов на другие и т. д. – явления хорошо известны в теории нелинейных колебаний и наблюдаются в турбулентных потоках. В результате, появляется возможность исчезновения одних и зарождения других вихрей, что, в свою очередь, видоизменяет гироскопическое поле, которое, в общем случае, будет неоднородным и нестационарным. Если учесть возможность возмущений случайного характера, то картина существенно усложнится, что в развитом виде воспринимается как хаос, как турбулентность.

1. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1973.
2. Потехин А. Ф. О взаимодействии гравитационных вихрей и линейной теории гравитации. Деп. в ВИНИТИ 13.03.82, №1114 – 82.